

SYLOWSÄTZE IN LOKALERREICHBAREN GRUPPEN

von
Heinz Strößner
aus
Illertissen

1960

Digitized by the Internet Archive
in 2026

SYLOWSÄTZE IN LOKALERREICHBAREN GRUPPEN

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Heinz Strößner
aus
Illertissen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1968
Dekan: Professor Dr. W. Haupt
Erstberichterstatter: Professor Dr. W. Specht
Zweitberichterstatter: Professor Dr. G. Nöbeling

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§1: Lokalisierung abstrakter Gruppeneigenschaften	4
§2: λ' -f-Gruppen	11
§3: p-Sylowgruppen in λ' -f-Gruppen	16
§4: Der Satz von HALL	28
§5: Lokalnilpotente λ' -f-Gruppen	40
§6: Der Satz von SCHUR	45
Literatur	52

Einleitung

In der Strukturtheorie endlicher Gruppen ist der Satz von P. HALL, nach dem eine endliche Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn sie ein Sylowsystem besitzt, von grundlegender Bedeutung.

R. BAER zeigte in [1], dass dieser Satz auf die Klasse der lokalnormalen Gruppen übertragen werden kann. Die Möglichkeit, den Satz von HALL weiter zu verallgemeinern, wird eingeschränkt durch ein Beispiel von KOVÁCS, NEUMANN und DE VRIES (man vergleiche [4], Theorem 4.4), nach dem eine lokalauf lösbare metafinite Gruppe, selbst wenn sie Erweiterung einer lokalnormalen mit einer lokalnormalen Gruppe ist, kein Sylowsystem besitzen muss.

Ersetzt man in der Definition der Gruppeneigenschaft "lokalnormal" die Forderung der Normalität durch die der Erreichbarkeit, so gelangt man zum Begriff der lokalerreichbaren Gruppen: Eine Gruppe G heisst lokal erreichbar, wenn jeder endliche Komplex K von G in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G liegt. Diese Gruppeneigenschaft wurde zuerst von W. SPECHT in einem formalen Kalkül abstrakter Gruppeneigenschaften formuliert. In diesem Kalkül werden lokalnormale Gruppen als λ^*f -Gruppen, lokalerreichbare Gruppen als $\lambda'f$ -Gruppen und metafinite Gruppen als $\mu'f$ -Gruppen bezeichnet. Es bestehen die Implikationen

$$\lambda^*f < \lambda'f < \mu'f.$$

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, dass ein wesentlicher Teil der Sylowtheorie, wie sie für λ^*f -Gruppen bekannt ist, auf die Klasse der $\lambda'f$ -Gruppen übertragen werden kann. Insbesondere werden wir mit Satz (4.5) den Satz von HALL für $\lambda'f$ -Gruppen beweisen.

Zunächst beschäftigen wir uns im ersten Paragraphen allgemein mit der Lokalisierung von abstrakten Gruppeneigenschaften und grenzen dann in Paragraph 2 die Eigenschaft "lokal erreichbar" gegen verwandte lokale Endlichkeitsbedingungen ab. Im dritten Paragraphen zeigen wir, dass die p -Sylowgruppen von $\lambda'f$ -Gruppen und die p -Sylowgruppen eines homomorphen Bildes einer $\lambda'f$ -Gruppe einfach charakterisiert werden können. Mit Hilfe einer analogen Charakterisierung der Sylowsysteme von $\lambda'f$ -Gruppen können wir im vierten Paragraphen den Satz von HALL beweisen. Im fünften Abschnitt untersuchen wir lokalnilpotente $\lambda'f$ -Gruppen. Als wesentliches Ergebnis gewinnen wir die Übertragung des Zerlegungssatzes von BURNSIDE: Eine lokal erreichbare Gruppe G ist genau dann lokalnilpotent, wenn sie direktes Produkt ihrer p -Sylowgruppen ist. Zum Abschluss übertragen wir in Paragraph 6 den Satz von SCHUR auf $\lambda'f$ -Gruppen. Nach dem oben zitierten Beispiel in [4] gilt auch dieser Satz nicht allgemein für $\mu'f$ -Gruppen.

In den Bezeichnungen halte ich mich eng an das Buch "Gruppentheorie" und an ein Manuskript meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. W. Specht. Die Paragraphen 1

bis 3 stützen sich auf dieses Manuskript.

Herrn Prof. Dr. W. Specht möchte ich an dieser Stelle danken für die grosszügige Förderung und für viele Anregungen, mit denen er die vorliegende Arbeit unterstützte.

§1: Lokalisierung von abstrakten Gruppeneigenschaften

Mit $E = \{1\}$ sei in dieser Arbeit stets die Einheitsgruppe bezeichnet.

Wir betrachten im folgenden abstrakte Eigenschaften von Gruppen, das heisst, Eigenschaften π , die mit einer Gruppe G auch allen zu G isomorphen Gruppen G' zukommen. So ist die Eigenschaft, endlich zu sein eine abstrakte Gruppeneigenschaft, während die Eigenschaft, Untergruppe einer festen Gruppe G zu sein, nicht abstrakt ist.

Hat eine Gruppe G die Eigenschaft π , so sprechen wir von einer π -Gruppe und schreiben $\pi(G) = 1$, andernfalls $\pi(G) = 0$. Entsprechend seien die Begriffe π -Untergruppe, π -Normalteiler usw. verstanden. Als Beispiele von abstrakten Gruppeneigenschaften wollen wir anführen:

f := endliche Gruppe,

a := abelsch,

z := zyklisch,

o := ordnungsfinit,

k := klassenfinit.

Von W. SPECHT wurde für die Klasse der abstrakten Gruppeneigenschaften ein formaler Kalkül entwickelt, mit dem es möglich ist, gruppentheoretische Zusammenhänge klar und übersichtlich darzustellen. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, sondern nur die Begriffe anführen, die wir im folgenden benötigen.

(1.1) Definition: Es seien π und π' abstrakte Gruppeneigenschaften.

a) Wir setzen $\pi \leq \pi'$, wenn jede π -Gruppe auch eine π' -Gruppe ist; gilt weiter $\pi \not\leq \pi'$, so setzen wir $\pi < \pi'$.

b) Die Gruppe G ist eine $(\pi \wedge \pi')$ -Gruppe, wenn G sowohl π -Gruppe als auch π' -Gruppe ist.

c) Die Gruppe G ist eine $\pi \cdot \pi'$ -Gruppe, wenn es in G einen π -Normalteiler N gibt, so dass $\pi'(G/N) = 1$ ist.

(1.2) Bemerkung: Es gelten offensichtlich stets die Implikationen

$$\pi \leq \pi \cdot \pi' \text{ und } \pi' \leq \pi \cdot \pi'.$$

Eine Erweiterung einer π -Gruppe mit einer π -Gruppe ist nicht notwendig wieder eine π -Gruppe. Es gilt zum Beispiel $f = ff$ und $\sigma = \sigma \cdot \sigma$. Wie das Beispiel der symmetrischen Gruppe S_3 zeigt, ist aber $j < j \cdot j$ und $\alpha < \alpha \cdot \alpha$. Gruppeneigenschaften π , für die $\pi \cdot \pi = \pi$ gilt, wollen wir nach R. BAER erweiterungsvererblich nennen.

(1.3) Definition: Eine Zuordnung $\varphi: \pi \rightarrow \varphi\pi$

von abstrakten Gruppeneigenschaften heisst ein

O p e r a t o r von Gruppeneigenschaften, wenn mit

$\pi \leq \pi'$ auch die Implikation $\varphi\pi \leq \varphi\pi'$ besteht.

Für diese Arbeit ist der L o k a l i s i e r u n g s - o p e r a t o r λ von speziellem Interesse. Um ihn definieren zu können, wollen wir zuerst an den Begriff der Normalfolge erinnern.

(1.4) Definition: a) Eine (eventuell transfinite) Untergruppenfolge $(U_v)_0 \leq v \leq \sigma$ der Gruppe G heisst eine (a u f s t e i g e n d e) N o r m a l f o l g e in G , wenn gilt:

$$1) U_0 = E; U_\sigma = G;$$

$$2) U_v \subset U_{v+1} \text{ f\"ur jeden Index } v < \sigma;$$

$$3) U_\tau = \bigcup_{v < \tau} U_v \text{ f\"ur jeden Limesindex } \tau \leq \sigma.$$

Die Faktorgruppen U_{v+1}/U_v heissen die F a k t o r e n der Normalfolge.

b) Eine Untergruppe $U \subset G$ heisst e r r e i c h b a r in G (in Zeichen $U \subset | G$), wenn U einer Normalfolge (U_v) von G angehört; kann (U_v) als endliche Normalfolge gewählt werden, so heisst U s u b n o r m a l in G .

Bezeichnet man mit $U^G = \{ U \mid U \in G \}$ den kleinsten Normalteiler von G , der die Untergruppe U umfasst, so gilt nach [2], Lemma 1.1.:

(1.5) Satz: (Lemma von BAER):

Ist U eine erreichbare Untergruppe der Gruppe G , so gibt es eine U und U^G verbindende Normalfolge, deren Faktoren epimorphe Bilder von U sind.

Eine abstrakte Gruppeneigenschaft π kann auf verschiedenste Arten lokalisiert werden. Für uns sind folgende Möglichkeiten von besonderer Bedeutung:

(1.6) Definition: Es sei π eine abstrakte Gruppeneigenschaft. Die Gruppe G heisst:

a) $\lambda\pi$ -Gruppe, wenn jeder endliche Komplex K von G eine π -Untergruppe U von G erzeugt;

b) $\lambda^0\pi$ -Gruppe, wenn jeder endliche Komplex K von G

in einer π -Untergruppe U von G liegt;

- c) λ'^{π} -Gruppe, wenn jeder endliche Komplex K von G in einer erreichbaren π -Untergruppe U von G liegt;
- d) λ^{π} -Gruppe, wenn jeder endliche Komplex K von G in einem π -Normalteiler N von G liegt.

$\lambda, \lambda^0, \lambda'$ und λ^* sind offensichtlich Operatoren von Gruppeneigenschaften. Eine $\lambda\pi$ -Gruppe wollen wir auch als lokale π -Gruppe bezeichnen; zum Beispiel sprechen wir von lokalendlichen Gruppen anstelle von λf -Gruppen.

(1.7) Satz: a) $\lambda(\pi \wedge \pi') = \lambda\pi \wedge \lambda\pi'$

b) $\lambda(\lambda\pi) = \lambda\pi$

c) $\pi \leq \lambda^*\pi \leq \lambda'\pi \leq \lambda^0\pi$

d) $\lambda\pi \leq \lambda^0\pi$

e) $\lambda\pi = \lambda^0\pi$ genau dann, wenn $\pi \leq \lambda\pi$.

Beweis: a) Ist G eine $\lambda(\pi \wedge \pi')$ -Gruppe und K ein endlicher Komplex von G, so ist $\{K\}$ eine $\pi \wedge \pi'$ -Gruppe. Es gilt also $\lambda(\pi \wedge \pi') \leq \lambda\pi \wedge \lambda\pi'$. Die Umkehrung ist ebenso trivial.

b) Sei G eine $\lambda(\lambda\pi)$ -Gruppe und sei K ein endlicher Komplex von G, dann ist $\{K\}$ eine $\lambda\pi$ -Gruppe. Das heisst, für jeden endlichen Komplex V von $\{K\}$ ist $\{V\}$ eine π -Gruppe. Nimmt man speziell $V = K$, so folgt, dass $\{K\}$ π -Gruppe ist. Damit haben wir die Implikation $\lambda(\lambda\pi) \leq \lambda\pi$.

Ist umgekehrt G eine $\lambda\pi$ -Gruppe, so ist jede endlich erzeugte Untergruppe U von G eine π -Gruppe. Jede endlich erzeugte Untergruppe V von U ist aber endlich erzeugte Untergruppe von G, also eine π -Gruppe. Damit gilt auch die Implikation $\lambda\pi \leq \lambda(\lambda\pi)$.

c), d) Diese Aussagen sind triviale Folgerungen von Definition (1.6).

e) Nach d) ist zu zeigen: 1) $\lambda^0\pi \leq \lambda\pi$ falls $\pi \leq \lambda\pi$;

2) $\pi \leq \lambda\pi$ falls $\lambda^0\pi \leq \lambda\pi$.

1) Sei G $\lambda^0 n$ -Gruppe, dann ist jeder endliche Komplex K von G enthalten in einer n -Untergruppe U von G . Wegen $r \leq 1/n$ ist $\{K\} \subset U$ eine n -Gruppe, also ist G eine λn -Gruppe.

2) Nach c) gilt $n \leq \lambda^0 n \leq \lambda n$, also insbesondere $n \leq \lambda n$. #

Neben dem Lokalisierungsoperator λ sind für uns noch folgende Operatoren von Gruppeneigenschaften von Bedeutung:

(1.8) Definition: Sei n eine abstrakte Gruppeneigenschaft und G eine Gruppe.

a) G heisst eine χn -Gruppe, wenn jedes homomorphe Bild $\bar{G}$ von G eine n -Gruppe ist.

b) G heisst eine εn -Gruppe, wenn jedes homomorphe Bild $\bar{U}$ jeder Untergruppe U von G eine n -Gruppe ist.

c) G heisst eine $\mu' n$ -Gruppe, wenn es in G eine Normalfolge $(U_v)_{0 \leq v \leq \sigma}$ gibt mit n -Faktoren U_{v+1}/U_v .

χ , ε und μ' sind offensichtlich Operatoren, und es gilt

$$\varepsilon n \leq \chi n \leq n.$$

Eine $\mu' n$ -Gruppe G wird auch als meta- n -Gruppe bezeichnet; zum Beispiel sprechen wir von metafiniten, metazyklischen und metabelschen Gruppen.

(1.9) Satz: Unter der Invarianz $\chi n = n$ gilt:

a) $\chi \mu' n = \mu' n$;

b) $\lambda' n \leq \lambda^* \mu' n \leq \mu' n$.

Beweis: a) Da allgemein $\chi \mu' n \leq \mu' n$ gilt, ist nur die Implikation $\mu' n \leq \chi \mu' n$ zu zeigen. Es sei $\bar{G}$ unter dem Homomorphismus h Bild der $\mu' n$ -Gruppe G . In G gibt es eine

Normalfolge $(\bar{U}_v)_0 \leq v \leq \sigma$:

$$U_0 = E; U_\sigma = G; U_v \subset U_{v+1} \text{ für jeden Index } v < \sigma;$$

$$U_\tau = \bigcup_{v < \tau} U_v \text{ für jeden Limesindex } \tau \leq \sigma;$$

mit π -Faktoren U_{v+1}/U_v für jeden Index $v < \sigma$.

Für jeden Index $v \leq \sigma$ sei $H_v = h(U_v)$. Das System

$(H_v)_0 \leq v \leq \sigma$ bildet eine Normalfolge in $\bar{G}$, und für jeden

Index $v < \sigma$ induziert h in kanonischer Weise einen Epimorphismus

$$h'_v: U_{v+1}/U_v \rightarrow H_{v+1}/H_v.$$

Wegen $\chi\pi = \pi$ ist für jedes $v < \sigma$ der Faktor H_{v+1}/H_v eine π -Gruppe, also ist $\bar{G}$ eine $\mu'\pi$ -Gruppe.

b) Es sei G eine $\lambda'\pi$ -Gruppe, dann liegt jeder endliche

Komplex K von G in einer erreichbaren π -Untergruppe U

von G . Nach Satz (1.5) gibt es in U^G eine Normalfolge

$(H_v)_0 \leq v \leq \xi$ mit $H_1 = U$, $H_\xi = U^G$ und mit Faktoren

H_{v+1}/H_v , die epimorphe Bilder von U sind.

Wegen $\chi\pi = \pi$, ist der Normalteiler U^G von G eine $\mu'\pi$ -Gruppe.

Da K in U und damit in U^G liegt, ist deshalb G eine

$\lambda*\mu'\pi$ -Gruppe.

Eine $\lambda*\mu'\pi$ -Gruppe G ist Kompositum von $\mu'\pi$ -Normalteilern

$(N_v)_1 \leq v \leq \sigma$, wobei für jeden Limesindex $\tau \leq \sigma$ $N_\tau = E$ gesetzt werde.

Es sei $N'_0 = E$; $N'_{v+1} = N'_v N_{v+1}$ für jeden Index $v < \sigma$;

und $N'_\tau = \bigcup_{v < \tau} N'_v$ für jeden Limesindex $\tau \leq \sigma$.

Damit erhalten wir in G eine Normalteilerfolge (N'_v) .

Da für jeden Index $v < \sigma$

$$N'_{v+1}/N'_v = N'_v N_{v+1}/N'_v \cong N_{v+1}/(N'_v \cap N_{v+1})$$

gilt, ist wegen $\chi\mu'\pi = \mu'\pi$ mit N_{v+1} auch der Faktor

N'_{v+1}/N'_v eine μ^n -Gruppe. Daraus folgert man dann unmittelbar die Behauptung. #

§2: λ^*f -Gruppen

Im folgenden bezeichne f -wie vereinbart- die Gruppeneigenschaft endliche Gruppe zu sein. Wir wollen in diesem Abschnitt die Eigenschaft λ^*f gegen verwandte Endlichkeitsbedingungen abgrenzen.

λ^*f -Gruppen bezeichnen wir auch als lokal normale, λ^*f -Gruppen als lokal erreichbar Gruppen.

(2.1) Satz: a) $\chi f = f$;

$$b) \lambda^0 f = \lambda f = (\lambda f)(\lambda f);$$

$$c) \lambda^* f = \sigma \wedge k;$$

$$d) \varepsilon f = ff = f.$$

Beweis: Die Aussage a) ist trivial. Da offensichtlich $f \leq \lambda f$ gilt, ist nach Satz (1.7.e) und [5], p. 153 auch die Aussage b) bewiesen.

c) Es sei G eine λ^*f -Gruppe, das heisst, jeder endliche Komplex K von G ist enthalten in einem endlichen Normalteiler N von G . G ist deshalb gewiss klassenfinit und ordnungsfinit, so dass $\lambda^*f \leq \sigma \wedge k$ gilt.

Ist umgekehrt G eine $\sigma \wedge k$ -Gruppe, dann ist jeder endliche Komplex K von G enthalten in einem endlichen normalen Komplex K' von G . Nach dem Lemma von DIETZMANN ([7], Satz 1.2.23*) erzeugt ein endlicher normaler Komplex K' aus Elementen endlicher Ordnung aber einen endlichen Normalteiler $N = \{K'\}$. Damit gilt auch $\sigma \wedge k \leq \lambda^*f$.

d) Die Invarianzen $ff = f$ und $\varepsilon f = f$ sind trivial. †

(2.2) Satz: a) $\varepsilon\lambda'f = \lambda'f$;

b) $\lambda'f < (\lambda'f)(\lambda'f)$;

c) $\lambda*f < (\lambda*f)(\lambda*f)$;

d) $\lambda'f < \mu'\lambda'f$;

e) $f < \lambda*f < \lambda'f < \lambda*\mu'f = \mu'f < \lambda f < \sigma$.

Beweis: a) Trivialerweise gilt $\varepsilon\lambda'f \leq \lambda'f$.

Es sei umgekehrt G eine $\lambda'f$ -Gruppe, U eine beliebige Untergruppe von G und $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ein endlicher Komplex in U . Dann existiert eine endliche erreichbare Untergruppe M von G mit $K \subset M$. Da dann aber auch

$$K \subset M \cap U \subset U$$

gilt, folgt, dass jede Untergruppe einer $\lambda'f$ -Gruppe wieder $\lambda'f$ -Gruppe ist.

Es sei nun N ein Normalteiler der $\lambda'f$ -Gruppe G . Wir behaupten, dass auch G/N eine $\lambda'f$ -Gruppe ist.

Ist $\bar{K} = (Nk_1, Nk_2, \dots, Nk_s)$ ein endlicher Komplex in G/N , so liegt der endliche Komplex $K = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G . Es ist

$$\bar{M} = MN/N \cong M/(M \cap N)$$

endlich, und es gilt

$$\bar{K} \subset \bar{M} \subset G/N.$$

Wendet man auf die zu M in G existierende Normalfolge den kanonischen Quotientenhomomorphismus

$$h: G \rightarrow G/N$$

an, so folgt, dass $\bar{M}$ erreichbar ist in G/N .

Damit haben wir zusammen die Aussage $\lambda'f \leq \varepsilon\lambda'f$, also

$$\lambda'f = \varepsilon\lambda'f.$$

b) Trivialerweise gilt $\lambda'f \leq (\lambda'f)(\lambda'f)$. Um zu zeigen,

dass das Gleichheitszeichen nicht gültig ist, geben wir folgendes Beispiel:

Es sei

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z/(3^k),$$

wo Z die Gruppe der ganzen Zahlen bezeichnet und $Z/(3^k)$ als Untergruppe von $Z/(3^{k+1})$ aufgefasst wird.

Jeder endliche Komplex K von P ist enthalten in einer Gruppe $Z/(3^m)$, also ist $\lambda'f(P) = \lambda*f(P) = 1$.

Es sei x ein Element der Ordnung 2 und die Gruppe G werde definiert durch:

$G := \{x, P\}$ mit $x^2 = 1$ und $z^x = z^{-1}$ für alle $z \in P$.
Wegen $z^x = z^{-1}$ kann jedes Element $g \in G$ dargestellt werden in der Form

$$g = z \text{ mit } z \in P$$

oder

$$g = xz \text{ mit } z \in P.$$

Es ist P normal in G und $G/P \cong \{x\}$. Da G/P als endliche Gruppe $\lambda*f$ -Gruppe ist, ist G eine $(\lambda*f)(\lambda'f)$ -Gruppe, also auch eine $(\lambda'f)(\lambda'f)$ -Gruppe.

Wir nehmen an, G ist eine $\lambda'f$ -Gruppe.

Zu dem Element $x \in G$ gibt es dann eine endliche erreichbare Untergruppe U von G mit $x \in U$. Da G unendlich ist, ist U echte Untergruppe von G . Da U erreichbar in G ist, muss es deshalb wenigstens ein Element g im Normalisator $N(U \subset G)$ von U geben mit $g \notin U$. Für ein solches g ist also

$$x^g \in U \text{ aber } g \notin U.$$

1) Ist $g \in P$, also $g = z$, so folgt $x^z \in U$ und $z \notin U$.

2) Hat g die Form $g = xz$ mit $z \in P$, so folgt

$$x^g = z^{-1} x^{-1} x x z = x^z \in U \text{ und } x z \notin U.$$

Wegen $xz = z^{-1}x$ ist $x^z = z^{-2}x$, und wegen $x \in U$ folgt damit

die Relation $z^{-2} \in U$.

Jedes Element $z \in P$ hat aber eine Ordnung 3^k , so dass $z \in U$ gelten muss, im Widerspruch zu den Bedingungen 1) bzw 2).

Also ist die $(\lambda * f)(\lambda * f)$ -Gruppe G keine $\lambda'f$ -Gruppe.

c) Die $(\lambda * f)(\lambda * f)$ -Gruppe G ist nicht $\lambda'f$ -Gruppe, also auch nicht $\lambda * f$ -Gruppe.

d) G besitzt die Normalfolge $E \subset |P| \subset |G|$ mit $\lambda'f$ -Faktoren P und G/P .

e) Nach den Sätzen (1.7.c), (2.1.a) und (1.9.b) gilt:

$$f \leq \lambda * f \leq \lambda'f \leq \lambda * \mu'f \leq \mu'f.$$

Wegen [7], Satz 1.4.42. ist $\mu'f \leq \lambda f$, und nach dem Beispiel von NOVIKOW (man vergleiche etwa [11], p. 85) ist $\lambda f < \emptyset$.

Für die echten Implikationen

$$f < \lambda * f < \lambda'f$$

lassen sich einfache Beispiele angeben. Die Implikation

$$\mu'f \leq \lambda * \mu'f$$

ist trivialerweise richtig. Die in b) konstruierte Gruppe G ist metafinit aber nicht lokalerreichbar, so dass wir

$$\lambda'f < \lambda * \mu'f = \mu f$$

haben. Dass nicht jede lokalendliche Gruppe metafinit ist, beweist das Beispiel der alternierenden Gruppe A_ω , die Gruppe der geraden finiten Permutationen einer abzählbaren Menge. Dazu vergleiche man etwa [9], p. 52.

Damit ist Satz (2.2) vollständig bewiesen. #

Zum Abschluss dieses Paragraphen sei noch ein einfacher Satz angeführt, den wir in §4 zum Beweis des Satzes von HALL benötigen werden.

(2.3) Satz: In einer λ' -Gruppe G ist das Kompositum

$\{U_1, U_2\}$ von zwei endlichen erreichbaren Untergruppen

U_1 und U_2 von G wieder endlich und erreichbar in G .

Beweis: Der endliche Komplex $K = U_1 U U_2$ liegt in einer

endlichen erreichbaren Untergruppe V von G . Für $i=1,2$

ist $U_i \subset | \subset G$, also gilt auch $U_i \subset | \subset V$. Da V endlich ist, folgt mit [6], Satz 15.2.4.

$$\{U_1, U_2\} \subset | \subset V \subset | \subset G.$$

#

§3: p-Sylowgruppen in λ' -Gruppen

Satz (2.2) grenzt die Gruppeneigenschaft λ' ab und gibt die Übertragungsmöglichkeiten dieser Eigenschaft an. In diesem Paragraphen wollen wir Sätze zur Bestimmung und Charakterisierung der p-Sylowgruppen einer λ' -Gruppe angeben. Dazu sei zuerst an die wesentlichsten Definitionen erinnert:

(3.1) Definition: Eine abstrakte Gruppeneigenschaft π

heißt Syloweigenschaft, wenn gilt:

0) $\pi(E) = 1$;

1) $\varepsilon\pi = \pi = \pi\pi$;

2) Ist $(U_v)_{v \in I}$ eine aufsteigende Kette von π -Untergruppen einer Gruppe G , so ist auch $V = \bigcup_{v \in I} U_v$ eine π -Untergruppe von G .

Wegen der Forderung $\pi(E) = 1$ besitzt jede Gruppe G zur Syloweigenschaft π π -Untergruppen; wegen Forderung (3.1.2) besitzt G damit maximale π -Untergruppen.

(3.2) Definition: Ist π eine Syloweigenschaft, so heißt eine maximale π -Untergruppe U von G eine π -Sylowgruppe von G . Die Menge aller π -Sylowgruppen einer Gruppe G bezeichnen wir mit $\text{Syl}_\pi(G)$.

Im folgenden bezeichne stets Π die Menge aller Primzahlen, π eine beliebige Primzahlmenge und π' das Komplement von π in Π . Ist $\pi = \{p\}$ einpunktig, so schreiben wir auch kurz $\pi = p$.

(3.3) Definition: Ein Element g einer Gruppe G ist

π -Element für eine (nicht-leere) Primzahlmenge π , wenn seine endliche Ordnung nur Primteiler

aus π besitzt; die Einheit 1 ist π -Element für jede Primzahlmenge π .

Eine Gruppe G ist π -G r u p p e, wenn jedes Element $g \in G$ ein π -Element ist.

Nach [7], Satz 3.2.1. gilt dann:

(3.4) Satz: Die abstrakte Gruppeneigenschaft π , eine π -Gruppe zu sein, ist Syloweigenschaft.

Besitzt die Gruppe G zur Primzahl p nur endlich viele p -Sylowgruppen, so sind nach [7], Satz 3.2.15*. die p -Sylowgruppen eines Normalteilers von G genau die verschiedenen unter den Durchschnitten des Normalteilers mit den p -Sylowgruppen von G . Unter Berücksichtigung von [7], Satz 1.4.34. lässt sich diese Aussage verschärfen. Es gilt:

(3.5) Satz: Die Gruppe G besitze zur Primzahl p nur endlich viele p -Sylowgruppen. Dann ist der Durchschnitt $S_p \cap U$ jeder p -Sylowgruppe S_p von G mit einer erreichbaren Untergruppe U von G eine p -Sylowgruppe von U .

Beweis: Es sei U eine erreichbare Untergruppe von G . Es existiert also eine Normalfolge (U_v) :

$$E = U_0; U = U_1; U_\sigma = G;$$

$$U_v \subset U_{v+1} \text{ für jeden Index } v < \sigma;$$

$$\text{und } U_\tau = \bigcup_{v < \tau} U_v \text{ für jeden Limesindex } \tau \leq \sigma.$$

Es sei $A(U, G)$ die Menge aller Ordinalzahlen ρ , für die es eine solche Normalfolge (U_v) mit $U_1 = U$ und $U_\rho = G$ gibt. Mit $\gamma = \gamma(U, G)$ werde das erste Element von $A(U, G)$ bezeichnet.

Ist $\gamma = 2$, so ist U normal in G , und die Behauptung des Satzes ist nach [7], Satz 3.2.15*. richtig.

Wir machen die Induktionsannahme: Die Behauptung ist richtig für jede erreichbare Untergruppe U' einer Gruppe G' , für die $\text{Syl}_p(G')$ endlich ist, so dass $\gamma(U', G') < \tau$ gilt.

Es sei nun U' erreichbare Untergruppe von G' mit $\gamma(U', G') = \tau$, und es sei $\text{Syl}_p(G')$ endlich.

Sei $S_p \in \text{Syl}_p(G')$.

Nach Voraussetzung gibt es eine Normalfolge $(U_v)_{0 \leq v \leq \tau}$ mit $U_1 = U'$ und $U_\tau = G'$.

Fall 1: τ ist nicht Limesindex.

Dann ist $U_{\tau-1} \subset U_\tau$, also ist nach Induktionsanfang der Durchschnitt $S_p^* = S_p \cap U_{\tau-1}$ p -Sylowgruppe von $U_{\tau-1}$. Da mit $\text{Syl}_p(U_\tau)$ auch $\text{Syl}_p(U_{\tau-1})$ endlich ist, und weiter $\gamma(U_1, U_{\tau-1}) \leq \tau-1$ gilt, folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass der Durchschnitt

$$S_p^* \cap U_1 = U_{\tau-1} \cap S_p \cap U_1 = U_1 \cap S_p = U' \cap S_p$$

p -Sylowgruppe von U' ist.

Fall 2: τ ist nicht Limesindex.

Dann ist $U_\tau = \bigvee_{v < \tau} U_v$ und

$$S_p = U_\tau \cap S_p = \left(\bigvee_{v < \tau} U_v \right) \cap S_p = \bigvee_{v < \tau} (U_v \cap S_p).$$

Existiert ein v_0 , $1 \leq v_0 < \tau$, so dass $U_{v_0} \cap S_p$ eine p -Sylowgruppe von U_{v_0} ist, so ist

$$U_1 \cap S_p = U_1 \cap (U_{v_0} \cap S_p)$$

nach Induktionsannahme p -Sylowgruppe von $U_1 = U'$.

Wir nehmen an, für alle v , $1 \leq v < \tau$, ist der Durchschnitt $U_v \cap S_p$ nicht p -Sylowgruppe von U_v .

Es seien

$$S_p, S_p^{g_1}, S_p^{g_2}, \dots, S_p^{g_n}$$

die verschiedenen p -Sylowgruppen von $G' = U_\tau$, und es sei

K der Komplex

$$K = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Nach [7], Satz 1.4.34. und der gemachten Annahme ist für jeden Index v , $1 \leq v < \tau$, der Durchschnitt $U_v \cap S_p$ echt enthalten in einer p -Sylowgruppe $U_v \cap S_p^{g_j(v)}$ von U_v mit geeignetem Element $g_j(v) \in K$:

$$(*): U_v \cap S_p \subsetneq U_v \cap S_p^{g_j(v)}, \quad g_j(v) \in K, \quad U_v \cap S_p^{g_j(v)} \in \text{Syl}_p(U_v).$$

Wir behaupten nun:

(**): Es existiert ein Element $g^* \in K$, so dass für alle v , $1 \leq v < \tau$, ein v' mit $v \leq v' < \tau$ existiert, so dass das Element $g_j(v')$ als g^* gewählt werden kann.

Angenommen (**) ist falsch, so gilt:

Für alle $g_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, gibt es ein $v(i)$, $1 \leq v(i) < \tau$, so dass für alle v' mit $v(i) \leq v' < \tau$ das Element $g_j(v')$ nicht als g_i gewählt werden kann.

Dann ist

$$v_0 = \max\{v(i), 1 \leq i \leq n\} < \tau,$$

und für alle $v > v_0$ kann $g_j(v)$ nicht als g_i gewählt werden, $1 \leq i \leq n$.

Da dies im Widerspruch zu (*) steht, ist (**) richtig.

Es werde nun gemäss (**) ein solches Element $g^* \in K$ fest gewählt. Für alle v , $1 \leq v < \tau$, gibt es also ein v' , $v \leq v' < \tau$, so dass

$$U_v \cap S_p \subsetneq U_v \cap S_p^{g^*} \in \text{Syl}_p(U_v)$$

gilt.

Da $\gamma(U_v, U_v) < \tau$ ist, folgt nach Induktionsvoraussetzung:

$$U_v \cap S_p \subsetneq U_v \cap S_p^{g^*} \in \text{Syl}_p(U_v) \quad \text{für alle } v, 1 \leq v < \tau.$$

Damit erhalten wir

$$S_p = \bigcup_{v < \tau} (U_v \cap S_p) \subset \bigcup_{v < \tau} (U_v \cap S_p^{g^*}) = S_p^{g^*},$$

im Widerspruch dazu, dass S_p und $S_p^{g^*}$ verschiedene p -Sylowgruppen von $U_\tau = G'$ sind.

Ist speziell $\tau = \gamma(U, G)$, so ist die Aussage des Satzes (3.5) bewiesen. †

Bemerkung: Für Satz (3.5) wurde auch von W. SPECHT in [8] ein (anderer) Beweis gegeben.

Bei Beschränkung auf lokalerreichbare Gruppen lässt sich, wie wir im folgenden zeigen werden, die in Satz (3.5) gemachte Endlichkeitsvoraussetzung unterdrücken.

(3.6) Satz: Es sei M eine endliche erreichbare Untergruppe der $\lambda'f$ -Gruppe G und P eine p -Untergruppe von G . Dann existiert eine P umfassende p -Sylowgruppe S_p von G , deren Durchschnitt $T_p = S_p \cap M$ p -Sylowgruppe in M ist.

Beweis: Existiert in M eine den Durchschnitt $P \cap M$ umfassende p -Sylowgruppe T_p , für die auch das Kompositum

$$P^* = \{T_p, P\}$$

eine p -Gruppe ist, so folgt für jede P^* umfassende p -Sylowgruppe S_p von G :

$$P \subset P^* \subset S_p \text{ und } T_p \subset P^* \cap M \subset S_p \cap M,$$

also

$$T_p = S_p \cap M.$$

Nun seien $T_1, T_2, \dots, T_k$ sämtliche den Durchschnitt $P \cap M$ umfassenden p -Sylowgruppen der endlichen Gruppe M . Wir

nehmen an, keines der Komposita

$$\{T_\zeta, P\}, 1 \leq \zeta \leq k,$$

sei eine p -Gruppe.

Zu jedem T_ζ lässt sich dann ein endlicher Komplex $K_\zeta \subset P$ wählen, so dass auch

$$\{T_\zeta, K_\zeta\}, 1 \leq \zeta \leq k,$$

nicht p -Gruppe ist. Denn es sei $x \in \{T_\zeta, P\}$ ein Element, das nicht p -Element ist; wenn genauer

$$x = t_1 p_1 t_2 p_2 \dots t_n p_n \text{ mit } t_v \in T_\zeta, p \in P, 1 \leq v \leq n,$$

gilt, so setze man $K_\zeta = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Dann gilt auch die Relation $x \in \{T_\zeta, K_\zeta\}$.

Da G λ 'f-Gruppe ist, existiert zum endlichen Komplex

$$K^* = M \cup \left(\bigcup_{\zeta=1}^k (T_\zeta \cup K_\zeta) \right)$$

eine endliche erreichbare Untergruppe M^* in G mit $K^* \subset M^*$.

Der Durchschnitt

$$D = M^* \cap P$$

enthält alle Komplexe K_ζ , also gilt

$$\{T_\zeta, K_\zeta\} \subset \{T_\zeta, D\} \subset M^*.$$

Da M erreichbar ist in G , ist M auch erreichbar in M^* .

Ist D in der p -Sylowgruppe S_p^* von M^* enthalten, so ist, da M^* endlich ist, nach Satz (3.5) der Durchschnitt

$$T = S_p^* \cap M \in \text{Syl}_p(M);$$

weiter gilt

$$M \cap P = (M^* \cap P) \cap M = D \cap M \subset S_p^* \cap M = T.$$

Ist aber o.B.d.A. $T = T_1$, so folgt

$$\{T_1, K_1\} \subset \{T_1, D\} = \{T_1, (M * NP)\} \subset S_p^*,$$

im Widerspruch zur Annahme, das Kompositum $\{T_1, K_1\}$ sei keine p -Gruppe. #

Setzt man in Satz (3.6) insbesondere $P = S_p \in \text{Syl}_p(G)$, so erhält man:

(3.7) Corollar: Es sei M endliche erreichbare Untergruppe der λ' -Gruppe G und S_p eine p -Sylowgruppe in G . Dann ist der Durchschnitt $T_p = S_p \cap M$ p -Sylowgruppe von M .

Mit diesem Corollar erhalten wir eine einfache Charakterisierung der p -Sylowgruppen einer λ' -Gruppe:

(3.8) Satz: Eine Untergruppe P der λ' -Gruppe G ist genau dann p -Sylowgruppe von G , wenn der Durchschnitt $P \cap M$ für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G p -Sylowgruppe in M ist.

Beweis: Nach Corollar (3.7) ist die Bedingung notwendig. Ist umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt, so ist P eine p -Gruppe, denn jedes Element $x \in P$ ist enthalten in einer endlichen erreichbaren Untergruppe V von G , also enthalten in $V \cap P$.

Ist P enthalten in der p -Sylowgruppe S_p von G , so gehört jedes Element $s \in S_p$ einer endlichen erreichbaren Untergruppe U von G an. Damit folgt

$$P \subset S_p, U \cap P \subset U \cap S_p, \text{ also } U \cap P = U \cap S_p.$$

Damit gilt aber auch $s \in P$ und deshalb $P = S_p$. #

Für lokalerreichbare Gruppen erhalten wir nun als Verschärfung von Satz (3.5):

(3.9) Satz: Es sei H eine erreichbare Untergruppe und S_p eine p -Sylowgruppe der λ' -Gruppe G . Dann ist der Durchschnitt $T_p = H \cap S_p$ p -Sylowgruppe von H .

Beweis: Wegen $\varepsilon \lambda' f = \lambda' f$ ist H eine λ' -Gruppe. Jede endliche erreichbare Untergruppe M von H ist auch erreichbar in G . Nach Satz (3.8) ist

$$M \cap S_p = M \cap (S_p \cap H) \in \text{Syl}_p(M),$$

also ist, wieder nach Satz (3.8), $S_p \cap H \in \text{Syl}_p(H)$. #

Zur Charakterisierung der p -Sylowgruppen eines epimorphen Bildes $\bar{G}$ einer lokalerreichbaren Gruppe G erhalten wir:

(3.10) Satz: Ist N ein Normalteiler der λ' -Gruppe G , so gilt:

- 1) Für jede p -Sylowgruppe S_p von G ist $S_p N / N$ p -Sylowgruppe der Faktorgruppe G/N .
- 2) Umgekehrt lässt sich jede p -Sylowgruppe von G/N so darstellen. Genauer:

Ist T/N p -Sylowgruppe von G/N , so ist jede p -Sylowgruppe S_p von T p -Sylowgruppe von G , und es gilt $T/N = S_p N / N$.

Beweis: 1) Wegen $\varepsilon \lambda' f = \lambda' f$ ist G/N eine λ' -Gruppe. Nach Satz (3.8) müssen wir zeigen, dass für eine beliebige endliche erreichbare Untergruppe M/N von G/N der Durchschnitt

$$M/N \cap S_p N / N \in \text{Syl}_p(M/N)$$

ist.

Da M/N erreichbar in G/N ist, ist M erreichbar in G .

Insbesondere ist M eine λ' -f-Gruppe.

Da M/N endlich ist, gibt es eine endliche erreichbare Untergruppe M' von M mit

$$M = M'N.$$

Denn sind $k_1N, k_2N, \dots, k_lN$ die verschiedenen Restklassen von M/N , so gibt es eine endliche erreichbare Untergruppe M' von M , die den endlichen Komplex $K = (k_1, \dots, k_l)$ umfasst. Zu einem Element $m \in M$ gibt es einen Index v , $1 \leq v \leq l$, mit $mN = k_vN$. Daraus folgt $k_v^{-1}m \in N$, also gilt $m \in M'N \subset M$.

Nach Satz (3.8) ist $S_p \cap M' \in \text{Syl}_p(M')$. Weiter ist $M' \cap N \subset M'$.

Nach [7], Satz 3.2.16. ist die Aussage 1) für endliche Gruppen, also speziell für M' richtig, so dass

$$(S_p \cap M')(M' \cap N) / (M' \cap N) \in \text{Syl}_p(M' / (M' \cap N))$$

ist. Weiter gelten die kanonischen Isomorphismen:

$$M'N/N \cong M' / (M' \cap N) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} (S_p \cap M')N/N &\cong (S_p \cap M') / ((S_p \cap M') \cap N) = \\ &= (S_p \cap M') / ((S_p \cap M') \cap (M' \cap N)) \cong (S_p \cap M')(M' \cap N) / (M' \cap N). \end{aligned}$$

Damit folgt die Relation

$$(*): \quad (S_p \cap M')N/N \in \text{Syl}_p(M'N/N).$$

Da $S_p N/N$ p -Gruppe ist, haben wir wegen

$$(S_p \cap M')N/N = (S_p \cap M')N/N \cap M/N \subset S_p N/N \cap M/N$$

die Gleichheit

$$S_p N/N \cap M/N = (S_p \cap M')N/N$$

und damit wegen (*) die Behauptung 1) bewiesen.

2) Es sei T/N eine p -Sylowgruppe von G/N ; S_p sei eine p -Sylowgruppe von T . Nach der bewiesenen Aussage (3.10.1) ist $S_p N/N$ p -Sylowgruppe von T/N , so dass gilt:

$$S_p N/N = T/N.$$

Ist S_p enthalten in der p -Sylowgruppe U_p von G , so folgt

$$S_p N/N \subset U_p N/N.$$

Nach Aussage 1) ist $U_p N/N \in \text{Syl}_p(G/N)$, also folgt die Gleichheit

$$S_p N/N = U_p N/N = T/N.$$

Zu jedem Element $u \in U_p$ gibt es deshalb ein Element $s \in S_p$ mit $uN = sN$. Also gilt $s^{-1}u \in N \subset T$, also $u \in T$. Da S_p als p -Sylowgruppe von T gewählt war, folgt wegen

$$S_p \subset U_p \subset T$$

die Gleichheit

$$S_p = U_p.$$

Also ist S_p p -Sylowgruppe von G .

#

Aus Satz (3.10) folgt unmittelbar:

(3.11) Corollar: Sind in einer λ 'f-Gruppe G alle

p -Sylowgruppen zueinander konjugiert, so sind es auch die p -Sylowgruppen jeder Faktorgruppe von G .

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir noch kurz auf folgende Probleme eingehen.

a) Nach [1] sind in einer λ *f-Gruppe G je zwei p -Sylowgruppen S_p und T_p fastähnlich. Das heisst, es gibt einen Automorphismus α der Gruppe G mit $S_p^\alpha = T_p$ und $N^\alpha = N$ für

jeden Normalteiler N von G . Es stellt sich die Frage nach der Übertragungsmöglichkeit dieses Satzes auf λ' f-Gruppen. Man wird in natürlicher Weise auf die Vermutung geführt: In einer λ' f-Gruppe G gibt es zu zwei p -Sylowgruppen S_p und T_p einen Automorphismus α von G mit $S_p^\alpha = T_p$ und $M^\alpha = M$ für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G . Wie sich am Beispiel der symmetrischen Gruppe S_4 leicht zeigen lässt, ist diese Vermutung falsch. Als Abschwächung erhält man die Vermutung:

In einer λ' f-Gruppe G sind je zwei p -Sylowgruppen S_p und T_p isomorph.

Am Beispiel der symmetrischen Gruppe S_4 kann gezeigt werden, dass diese Vermutung nicht durch transfinite Induktion längs einer metafiniten Normalfolge von G bewiesen werden kann. Diese Beweismethode von R. BAER, wie sie in [1] bei λ^*f -Gruppen angewendet wird, versagt für λ' f-Gruppen auch unter Ausnutzung des Satzes (1.5). Ebenso kann gezeigt werden, dass zum Beweis der aufgestellten Vermutung auch die Methode von MAL'CEV, wie sie in [5], p. 169 angewendet wird, nicht zum Ziel führen kann. Zur Beurteilung der auftretenden Schwierigkeiten sei an [4] erinnert. Dort wird eine abzählbare lokalendliche Gruppe G vom Exponenten 6 angegeben, die stark auflösbar von der Länge 2 ist und die kontinuierlich viele 3-Sylowgruppen besitzt, welche paarweise nicht isomorph sind. G ist insbesondere metazyklisch und eine $(\sigma_1\alpha)(\sigma_1\alpha)$ -Gruppe. Es gilt $(\sigma_1\alpha)(\sigma_1\alpha) \leq (\lambda^*f)(\lambda^*f) \leq (\lambda'f)(\lambda'f) \leq \mu f$.

b) Es stellt sich weiter die Frage nach der Übertragungsmöglichkeit des Satzes von KARGAPOLOW auf λ' f-Gruppen. In

[3] wird gezeigt: In einer λ^*f -Gruppe G sind je zwei p -Sylowgruppen genau dann zueinander konjugiert, wenn $\text{Syl}_p(G)$ endlich ist. Für abzählbare λ^*f -Gruppen wird für diesen Satz in [1] ein kanonischer Beweis gegeben. Dass eine Übertragung dieses Satzes auf $\lambda'f$ -Gruppen - schon im abzählbaren Fall - grössere Schwierigkeiten mit sich bringt, zeigt das Beispiel der im Beweis zu Satz (2.2) konstruierten Gruppe $G = \{P, x\}$. Diese Gruppe ist eine $(\lambda\lambda^*f)(\lambda'f)$ -Gruppe aber keine $\lambda'f$ -Gruppe. Zur Primzahl 2 besitzt G unendlich viel 2-Sylowgruppen, die alle zueinander konjugiert sind. Denn:

Für jedes Element $z \in P$ gilt $(xz)(xz) = 1$. Es ist $(xz_1)(xz_2) = z_1^{-1}z_2$, und da jedes Element $z \in P$ eine Ordnung 3^k besitzt, folgt, dass die Gruppen $\{xz\}$ genau die 2-Sylowgruppen von G sind. Zu $z_1, z_2 \in P$ mit $z_1 \neq z_2$ gibt es, da P divisibel ist, ein $y \in P$ mit $y^2 = z_1^{-1}z_2$. Für ein solches y ist aber dann $(xz_1)^y y = y^{-1}xz_2 = xyz_2 = xz_2y$. Also gilt $(xz_1)^y = xz_2$, das heisst, in G sind die unendlich vielen 2-Sylowgruppen alle paarweise konjugiert.

§4: Der Satz von HALL

Analog zur Bestimmung der p -Sylowgruppen in Satz (3.8) lassen sich auch die Sylowsysteme von λ' -f-Gruppen charakterisieren.

(4.1) Definition: Ein Untergruppenverband Σ der ordnungsfiniten Gruppe G heisst **Sylowsystem** von G , wenn gilt:

- 1) Σ enthält für jede Primzahlmenge $\pi \subset \Pi$ eine π -Sylowgruppe S_π .
- 2) Für jedes Paar von Primzahlmengen π_1, π_2 und Untergruppen $S_{\pi_1}, S_{\pi_2} \in \Sigma$ gilt

$$S_{\pi_1} \cap S_{\pi_2} = S_{\pi_1 \cap \pi_2}; \{S_{\pi_1}, S_{\pi_2}\} = S_{\pi_1} S_{\pi_2} = S_{\pi_1 \cup \pi_2}.$$

Nach (4.1.2) enthält ein Sylowsystem Σ für jede Primzahlmenge π genau eine π -Sylowgruppe S_π von G .

Wegen

$$S_\pi = \prod_{p \in \pi} S_p$$

bestimmen die p -Sylowgruppen $S_p \in \Sigma$ das Sylowsystem Σ .

Daher besitzt ein Sylowsystem Σ von G eine **Sylowbasis** (S_p) aus paarweise vertauschbaren p -Sylowgruppen von G :

$$S_p S_q = S_q S_p \text{ für Primzahlen } p \neq q, \text{ mit } G = \prod_p S_p.$$

(4.2) Satz: Ein System $\Sigma = (S_\pi)$ von π -Untergruppen der λ' -f-Gruppe G ist genau dann ein Sylowsystem von G , wenn für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G das System $\Sigma_M = (S_\pi \cap M)$ ein Sylowsystem von M ist.

Beweis: Es sei $\Sigma = (S_\pi)$ ein Sylowsystem von G mit der Sylowbasis (S_p) . Nach Satz (3.8) ist dann für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G und für jede Primzahl p der Durchschnitt $M \cap S_p$ p -Sylowgruppe in M . Ist π eine beliebige Primzahlmenge, so gilt für das Kompositum

$$\{ \bigcup_{p \in \pi} (M \cap S_p) \} \subset M \cap \prod_{p \in \pi} S_p = M \cap S_\pi,$$

wenn

$$S_\pi = \prod_{p \in \pi} S_p$$

ist.

Da M endlich ist, sind nur endlich viele Durchschnitte $M \cap S_p$, etwa $M \cap S_{p_\sigma}$, $1 \leq \sigma \leq s$, von E verschieden.

Für $1 \leq \rho, \sigma \leq s$ gilt dann

$$U = \{ (M \cap S_{p_\rho}), (M \cap S_{p_\sigma}) \} \subset M \cap S_{p_\rho} S_{p_\sigma} = M \cap S_{(p_\rho, p_\sigma)}.$$

Als endliche (p_ρ, p_σ) -Gruppe ist U nach dem Satz von BURNSIDE ([7], Satz 3.2.2*) auflösbar. Nach [7], p. 387 und 389 folgt deshalb die Gleichheit

$$U = (M \cap S_{p_\rho})(M \cap S_{p_\sigma}) = (M \cap S_{p_\sigma})(M \cap S_{p_\rho}).$$

Mit [7], Satz 1.2.16. haben wir damit

$$M = \prod_{\rho=1}^s (M \cap S_{p_\rho}) = \prod_p (M \cap S_p),$$

also bestimmen die Gruppen $(M \cap S_p)$ als Sylowbasis von M ein Sylowsystem Σ^* von M .

Wegen

$$\prod_{p \in \pi} (M \cap S_p) \subset M \cap S_\pi$$

besteht deshalb die Gleichheit

$$\prod_{p \in \pi} (M \cap S_p) = M \cap S_\pi.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\Sigma^* = \Sigma_M = (M \cap S_\pi)$ ein Sylowsystem von M ist.

Ist umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt, so ist für jede Primzahl p und für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G der Durchschnitt $M \cap S_p \in \text{Syl}_p(M)$. Wegen Satz (3.8) gilt deshalb $S_p \in \text{Syl}_p(G)$.

Es sei

$$s \in S_\pi^* = \{ \bigcup_{p \in \pi} S_p \},$$

dann besitzt s eine endliche Darstellung durch Elemente der Gruppen S_p mit $p \in \pi$. Da diese endlich vielen Elemente einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G angehören, ist

$$s \in \prod_{p \in \pi} (M \cap S_p).$$

Damit ist s ein π -Element, also ist S_π^* eine π -Gruppe.

Für Primzahlen $p \neq q$ ist $S_p \cap S_q = E$ und $S_p S_q = S_q S_p$.

Denn ist $g \in S_p$, $h \in S_q$, so liegen g und h in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G . Da $M \cap S_p$ mit $M \cap S_q$ vertauschbar ist, gibt es Elemente $h' \in M \cap S_q$ und $g' \in M \cap S_p$ mit $gh = h'g'$. Also gilt $S_p S_q \subset S_q S_p$ und deshalb $S_p S_q = S_q S_p$.

Damit folgt die Relation

$$S_\pi^* = \prod_{p \in \pi} S_p.$$

Jedes Element $s \in S_\pi^* \cap \Sigma$ liegt in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G , weshalb

$$s \in M \cap S_\pi = \prod_{p \in \pi} (M \cap S_p) \subset S_\pi^*,$$

also $S_\pi \subset S_\pi^*$ gilt.

Umgekehrt liegt jedes Element $t \in S_\pi^*$ in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G . Nach obigem ist

$$M \cap S_{\pi} \subset M \cap S_{\pi}^*.$$

Da S_{π}^* π -Gruppe ist und nach Voraussetzung $M \cap S_{\pi} \in \text{Syl}_{\pi}(M)$ gilt, folgt $M \cap S_{\pi} = M \cap S_{\pi}^*$ und $t \in S_{\pi}$, womit wir die Gleichheit $S_{\pi} = S_{\pi}^*$ haben. Also ist S_{π} π -Sylowgruppe von G , und das System Σ Sylowsystem von G . #

(4.3) Corollar: Ist $\Sigma = (S_{\pi})$ ein Sylowsystem der λ' -f-Gruppe G , so ist für jede erreichbare Untergruppe M von G das System $\Sigma_M = (M \cap S_{\pi})$ ein Sylowsystem von M .

Beweis: Mit G ist auch M λ' -f-Gruppe. Jede endliche erreichbare Untergruppe von M ist auch erreichbar in G . Damit folgt nach Satz (4.2) unmittelbar die Behauptung. #

Als Hilfsaussage zum Beweis des Satzes von HALL benötigen wir noch:

(4.4) Hilfssatz: Es sei jede endliche erreichbare Untergruppe der λ' -f-Gruppe G auflösbar, und es sei P eine π -Untergruppe von G zur Primzahlmenge π .

Dann existiert zur endlichen erreichbaren Untergruppe M von G eine den Durchschnitt $M \cap P$ umfassende π -Sylowgruppe T_{π} von M , so dass das Kompositum $\{P, T_{\pi}\}$ π -Untergruppe von G ist.

Beweis: Es seien $T_1, T_2, \dots, T_k$ sämtliche $P \cap M$ umfassende π -Sylowgruppen der endlichen erreichbaren Untergruppe M von G . Wir nehmen an, keines der Komposita

$$\{T_v, P\}, \quad 1 \leq v \leq k,$$

ist eine π -Gruppe.

Dann lässt sich -wie im Beweis zu Satz (3.6)- zu jedem v , $1 \leq v \leq k$, ein endlicher Komplex $K_v \subset P$ wählen, so dass

auch $\{T_v, K_v\}$ nicht π -Gruppe ist. Zum endlichen Komplex

$$K^* = M \cup \bigcup_{v=1}^k (T_v \cup K_v)$$

existiert dann eine K^* umfassende endliche erreichbare Untergruppe M^* von G . Der Durchschnitt

$$D = M^* \cap P$$

enthält alle Komplexe K_v , und es ist M erreichbar in M^* .

Ist D in der π -Sylowgruppe S_π^* von M^* enthalten, so gilt

$$T = S_\pi^* \cap M \in \text{Syl}_\pi(M).$$

Denn nach Voraussetzung ist M^* auflösbar, besitzt also nach [7], Satz 3.2.20. ein Sylowsystem Σ , welches so gewählt werden kann, dass $S_\pi^* \in \Sigma$ gilt. Da M erreichbar ist in M^* , folgt mit Satz (4.2), dass T π -Sylowgruppe von M ist. Gilt o.E.d.A. $T = T_1$, so folgt $\{T_1, K_1\} \subset S_\pi^*$, im Widerspruch zur Annahme, $\{T_1, K_1\}$ sei keine π -Gruppe. ‡

Damit können wir nun den Satz von HALL für λ' f-Gruppen beweisen.

(4.5) Satz (Satz von HALL): Die λ' f-Gruppe G ist genau dann metazyklisch, wenn sie ein Sylowsystem $\Sigma = (S_\pi)$ besitzt.

Beweis: 1) Es sei G eine metazyklische λ' f-Gruppe.

Nach [7], Satz 3.1.25. besitzt G eine Normalfolge

$$(H_v)_0 \leq v \leq \sigma:$$

$$E = H_0; H_\sigma = G; H_v \subset H_{v+1} \text{ für jeden Index } v < \sigma;$$

$$H_\tau = \bigcup_{v < \tau} H_v \text{ für jeden Limesindex } \tau \leq \sigma;$$

mit Faktoren H_{v+1}/H_v von Primzahlordnung für jeden Index $v < \sigma$.

Durch transfinite Induktion beweisen wir die Aussage:

Jede der Gruppen H_v , $0 \leq v \leq \sigma$, besitzt ein Sylow-system $\Sigma_v = (S_{\pi v})$ mit $S_{\pi \mu} \subset S_{\pi v}$ für jeden Index $\mu < v$ und jede Primzahlmenge π .

Der Induktionsbeginn mit $H_0 = E$ ist trivial gegeben.

Wir können also annehmen, für jeden Index $v < \lambda$ ist ein Sylowsystem $\Sigma_v = (S_{\pi v})$ von H_v so bestimmt, dass für jeden Index $\mu < v$ und jede Primzahlmenge π gilt $S_{\pi \mu} \subset S_{\pi v}$.

Fall 1: λ ist nicht Limesindex.

Dann ist $H_{\lambda-1} \subset H_\lambda$ und es gibt ein $x \in H_\lambda$ mit

$$H_\lambda / H_{\lambda-1} = \{xH_{\lambda-1}\}.$$

Es folgt die Gleichheit

$$H_\lambda = \{x\}H_{\lambda-1}.$$

Die von x erzeugte Untergruppe $\{x\}$ ist endlich, also gibt es, da mit G auch H_λ eine λ 'f-Gruppe ist, eine endliche erreichbare Untergruppe M von H_λ mit $x \in M$, und es ist

$$H_\lambda = MH_{\lambda-1}.$$

Wegen $\varepsilon_3 = 3$ ist nach [7], Satz 3.1.24. mit G auch M metazyklisch, also ist die endliche Gruppe M auflösbar.

Nach dem Satz von HALL für endliche Gruppen ([7], Satz 3.2.20.) besitzt M ein Sylowsystem $T = (T_\pi)$.

Ist nun V eine endliche erreichbare Untergruppe von H_λ , so liegt V im Kompositum $\{M, F\}$ von M und einer endlichen erreichbaren Untergruppe F von $H_{\lambda-1}$.

Nach Satz (2.3) ist $\{M, F\}$ endliche erreichbare Untergruppe von H_λ .

Für jede Primzahlmenge π sei

$$T_\pi^* = \{S_{\pi \lambda-1}, T_\pi\}.$$

Wir behaupten nun:

(*) : Das System $T^* = (T_{\pi}^*)$ ist genau dann Sylowsystem von H_{λ} , wenn das System $(T_{\pi}^* \cap \{M, F\})$ Sylowsystem von $\{M, F\}$ ist für jede endliche erreichbare Untergruppe F von $H_{\lambda-1}$.

Beweis von (*): Ist T^* Sylowsystem von H_{λ} , so ist die Behauptung nach den Sätzen (2.3) und (4.2) richtig. Ist umgekehrt die Bedingung von (*) erfüllt, so gibt es nach obigem zu jeder endlichen erreichbaren Untergruppe V von H_{λ} eine endliche erreichbare Untergruppe F von $H_{\lambda-1}$ mit $V \subset \{M, F\}$. Da V erreichbar ist in H_{λ} , ist V auch erreichbar in $\{M, F\}$. Dann ist aber das System

$$((T_{\pi}^* \cap \{M, F\}) \cap V) = (T_{\pi}^* \cap V)$$

nach Satz (4.2) ein Sylowsystem von V , also ist T^* nach Satz (4.2) ein Sylowsystem von H_{λ} . Damit ist (*) bewiesen.

Es seien nun $_1T, _2T, \dots, _nT$ die verschiedenen Sylowsysteme der endlichen auflösbaren Gruppe M . Wir nehmen an, für kein $v, 1 \leq v \leq n$, ist das System

$$_vT^* = (\{S_{\pi\lambda-1}, _vT_{\pi}^*\}) = (_vT_{\pi}^*)$$

ein Sylowsystem von H_{λ} .

Wegen (*) existiert dann zu jedem $v, 1 \leq v \leq n$, eine endliche erreichbare Untergruppe F_v von $H_{\lambda-1}$, so dass auch das System

$$(_vT_{\pi}^* \cap \{M, F_v\})$$

kein Sylowsystem von $\{M, F_v\}$ bildet. (**)

Wegen $H_{\lambda-1} \subset H_{\lambda}$ gilt $M \cap H_{\lambda-1} \subset M \subset H_{\lambda}$, und nach Satz (2.3) ist das Kompositum

$$F_0 = \{(\bigcup_{v=1}^n F_v) \cup (M \cap H_{\lambda-1})\}$$

endliche erreichbare Untergruppe von $H_{\lambda-1}$. Deshalb ist

auch das Kompositum $\{M, F_0\}$ endlich und erreichbar in H_λ .
Es sei

$$A = \{M, F_0\} \cap H_{\lambda-1},$$

dann gilt

$$\{M, F_0\} = \{x\}A \text{ und } A \subset \{M, F_0\}.$$

Denn: Wegen $H_{\lambda-1} \subset H_\lambda$ ist $A \subset \{M, F_0\}$. Da $x \in M$ ist, folgt $\{x\}A \subset \{M, F_0\}$. Ist umgekehrt $g \in \{M, F_0\} \subset H_\lambda$, so gilt $g = x^s h$ mit $h \in H_{\lambda-1}$, also folgt $h \in A$ und damit $g \in \{x\}A$.
Da $\{M, F_0\}$ erreichbar ist in H_λ , ist A erreichbar in $H_{\lambda-1}$.
Nach Satz (4.2) bilden deshalb die Durchschnitte

$$(A \cap S_{\pi\lambda-1})$$

ein Sylowsystem von A .

Bezeichnet - wie in §3 vereinbart - π' die zu π komplementäre Primzahlmenge, so gibt es, da jede endliche erreichbare Untergruppe von H_λ metazyklisch, also auflösbar ist, nach Satz (4.4) zu jeder Primzahl p zur p' -Gruppe $S_p = S_{p', \lambda-1}$ von H_λ eine p' -Sylowgruppe U_p von $\{M, F_0\}$ so dass das Kompositum $\{S_p, U_p\}$ eine p' -Gruppe ist, und so dass $\{M, F_0\} \cap S_p \subset U_p$ gilt. Wegen

$$\{M, F_0\} \cap S_p = \{M, F_0\} \cap H_{\lambda-1} \cap S_p = A \cap S_p \subset A \cap U_p,$$

folgt die Gleichheit

$$A \cap S_p = A \cap U_p.$$

Da U_p p' -Sylowgruppe von $\{M, F_0\}$ ist, und da $\{S_p, U_p\}$ p' -Gruppe ist, folgt weiter die Gleichheit

$$\{M, F_0\} \cap \{S_p, U_p\} = U_p.$$

Ist V_p eine beliebige p -Sylowgruppe von $\{M, F_0\}$, so folgt nach [7], p. 389, da $\{M, F_0\}$ auflösbar ist, die Relation

$$\{M, F_0\} = U_p, V_p = V_p U_p.$$

Damit folgt mit [7], Satz 3.2.14*., dass für jede Primzahl p die Gruppe U_p , ein p -Komplement von $\{M, F_0\}$ ist.

Nach dem Beweis des Satzes von HALL für endliche Gruppen ([7], Satz 3.2.20.) bestimmen aber die p -Komplemente U_p , von $\{M, F_0\}$ vermöge

$$U_\pi = \bigcap_{p \in \pi} U_p, \text{ also } U_\pi = \bigcap_{p \in \pi'} U_p,$$

ein Sylowsystem (U_π) von $\{M, F_0\}$.

Ebenso gilt für das Sylowsystem $(S_\pi) = (S_{\pi\lambda-1})$ von $H_{\lambda-1}$

$$S_\pi = \bigcap_{p \in \pi'} S_p.$$

Für jede Primzahlmenge π folgt damit

$$A \cap S_\pi = A \cap \left(\bigcap_{p \in \pi'} S_p \right) = \bigcap_{p \in \pi'} (A \cap S_p) = \bigcap_{p \in \pi'} (A \cap U_p) = A \cap U_\pi,$$

und

$$\begin{aligned} \{M, F_0\} \cap \{S_\pi, U_\pi\} &= \{M, F_0\} \cap \left(\left(\bigcap_{p \in \pi'} S_p \right), \left(\bigcap_{p \in \pi'} U_p \right) \right) \subset \\ &\subset \{M, F_0\} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi'} (S_p, U_p) \right) \subset \{M, F_0\} \cap \bigcap_{p \in \pi'} \{S_p, U_p\} = \\ &= \bigcap_{p \in \pi'} (\{M, F_0\} \cap \{S_p, U_p\}) = \bigcap_{p \in \pi'} U_p = U_\pi. \end{aligned}$$

Damit haben wir für jede Primzahlmenge π die Gleichheit

$$\{M, F_0\} \cap \{S_\pi, U_\pi\} = U_\pi.$$

Als erreichbare Untergruppe von H_λ ist M erreichbar in $\{M, F_0\}$, und nach Satz (4.2) bilden die Durchschnitte $(M \cap U_\pi)$ ein Sylowsystem von M . Nach obigem folgt

$$\{M, F_0\} \cap \{S_\pi, (M \cap U_\pi)\} \subset U_\pi.$$

Wir behaupten, dass sogar Gleichheit gilt.

Denn, es sei $u \in U_\pi$, dann gilt wegen $\{M, F_0\} = \{x\}A$ mit geeignetem $a \in A$ $u = x^r a$. Da A normal ist in $\{M, F_0\}$, bilden die

Durchschnitte $(A \cap U_\pi)$ ein Sylowsystem von A , und es gilt für jede Primzahlmenge π

$$A = (A \cap U_\pi)(A \cap U_{\pi'}) = (A \cap U_{\pi'})(A \cap U_\pi).$$

Es gibt deshalb Elemente $a'' \in A \cap U_\pi$, und $a' \in A \cap U_{\pi'}$ mit $a = a''a'$. Ebenso ist $M = (M \cap U_\pi)(M \cap U_{\pi'})$, und wegen $x^r \in M$ gibt es Elemente $m' \in M \cap U_\pi$ und $m'' \in M \cap U_{\pi'}$, mit $x^r = m'm''$. Damit haben wir $u = m'm''a''a'$, so dass $(m')^{-1}u(a')^{-1} = m''a''$ gilt. Nach Konstruktion ist $(m')^{-1}u(a')^{-1} \in U_\pi$ und $m''a'' \in U_{\pi'}$, so dass wegen $U_\pi \cap U_{\pi'} = E$ $m''a'' = 1$ und damit

$$u = m'a' \in (M \cap U_\pi)(A \cap U_\pi) = (M \cap U_\pi)(A \cap S_\pi) \subset \{S_\pi, (M \cap U_\pi)\}$$

gilt, womit die behauptete Gleichheit

$$\{M, F_0\} \cap \{S_\pi, (M \cap U_\pi)\} = U_\pi$$

bewiesen ist.

Da für alle v , $1 \leq v \leq n$, $\{M, F_v\}$ erreichbar ist in H_λ , ist auch $\{M, F_v\}$ erreichbar in $\{M, F_0\}$. Nach Satz (4.2) bilden dann die Durchschnitte

$$\{M, F_v\} \cap U_\pi = \{M, F_v\} \cap \{S_\pi, (M \cap U_\pi)\}$$

ein Sylowsystem von $\{M, F_v\}$, für alle v mit $1 \leq v \leq n$.

Da dies aber im Widerspruch zu (**) steht, haben wir gezeigt, dass es ein Sylowsystem $(S_{\pi\lambda})$ von H_λ gibt mit $S_{\pi\lambda-1} \subset S_{\pi\lambda}$ für jede Primzahlmenge π .

Fall 2: λ ist Limesindex.

Wir setzen für jede Primzahlmenge π

$$S_{\pi\lambda} = \bigcup_{v < \lambda} S_{\pi v},$$

dann erfüllt das System $(S_{\pi\lambda})$ alle geforderten Bedingungen.

Damit ist für jeden Index $\lambda \leq \sigma$ ein Sylowsystem $(S_{\pi\lambda})$ von

H_λ erklärt. Insbesondere ist $(S_{\pi\sigma})$ ein Sylowsystem von $H_\sigma = G$.

2) Es bleibt noch zu zeigen, dass eine λ' f-Gruppe G , die ein Sylowsystem $\Sigma = (S_\pi)$ besitzt, metazyklisch ist.

Wegen $\lambda'f < \mu'f$ besitzt G eine metafinite Normalfolge

$$(H_v)_0 \leq v \leq \sigma;$$

$$E = H_0; H_\sigma = G; H_v \subset H_{v+1} \text{ für jeden Index } v < \sigma;$$

$$H_\mu = \bigcup_{v < \mu} H_v \text{ für jeden Limesindex } \mu \leq \sigma;$$

mit endlichen Faktoren H_{v+1}/H_v für jeden Index $v < \sigma$.

Wir behaupten: Für alle $v \leq \sigma$ gibt es eine metazyklische Normalfolge $(K_v^V)_{v \leq \sigma(v)}$, so dass für jeden Index $\mu < v$ die Folge $(K_v^\mu)_{v \leq \sigma(\mu)}$ ein Abschnitt der Folge $(K_v^V)_{v \leq \sigma(v)}$ ist.

Beweis: Für $v = 0$ ist die Behauptung gegeben.

Wir nehmen an, für jedes $v < \lambda$ ist eine solche metazyklische Normalfolge bestimmt.

Fall 1: λ ist Limesindex.

Dann ist die Vereinigung aller Normalfolgen $(K_v^V)_{v \leq \sigma(v)}$ mit $v < \lambda$ eine gesuchte metazyklische Normalfolge von H_λ .

Fall 2: λ ist nicht Limesindex.

Dann ist $H_{\lambda-1} \subset H_\lambda$, und der Faktor $H_\lambda/H_{\lambda-1}$ ist endlich. Es gibt eine endliche erreichbare Untergruppe M von H_λ mit $H_\lambda = MH_{\lambda-1}$. Nach Satz (4.2) ist das System $(S_\pi \cap M)$ ein Sylowsystem von M , also ist M auflösbar und besitzt deshalb als endliche Gruppe eine metazyklische Normalreihe

$$E = M^0 \subset M^1 \subset M^2 \subset \dots \subset M^k = M.$$

Nach dem dritten Isomorphiesatz folgt für $0 \leq i \leq k-1$:

$$M^{i+1}/M^i(M^{i+1} \cap H_{\lambda-1}) \cong H_{\lambda-1} M^{i+1} / H_{\lambda-1} M^i,$$

und weiter ist

$$M^{i+1}/M^i(M^{i+1} \cap H_{\lambda-1}) \cong M^{i+1}/M^i \cdot M^i(M^{i+1} \cap H_{\lambda-1})/M^i,$$

woraus wegen $\varepsilon \mathfrak{J} = \mathfrak{J}$ folgt, dass die Faktoren

$M^{i+1}H_{\lambda-1}/M^iH_{\lambda-1}$ zyklisch sind. Damit erhalten wir durch Anfügen der Normalreihe

$$M^1H_{\lambda-1} \subset M^2H_{\lambda-1} \subset \dots \subset M^kH_{\lambda-1} = H_{\lambda}$$

an die gegebene metazyklische Normalfolge $(K_Y^{\lambda-1})_Y \leq \sigma(\lambda-1)$ eine metazyklische Normalfolge für H_{λ} .

Ist insbesondere $\lambda = \sigma$, so folgt, dass G metazyklisch ist

Damit ist Satz (4.5) vollständig bewiesen. #

Aus dem Beweisgang von Satz (4.5) erhalten wir noch:

(4.6) Satz: Eine μ' -f-Gruppe G ist genau dann lokalauf-
lösbar, wenn sie metazyklisch ist.

§5: Lokalnilpotente λ' -Gruppen

In der Theorie endlicher Gruppen ist der Zerlegungssatz von BURNSIDE von weitreichender Bedeutung. Nach [7], Satz 3.2.4. gilt:

Eine endliche Gruppe G ist genau dann nilpotent, wenn sie direktes Produkt ihrer p -Sylogruppen ist. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, dass sich mit Hilfe des Beweisganges des Satzes von HALL (Satz (4.5)) der Zerlegungssatz von BURNSIDE auch für λ' -Gruppen gewinnen lässt.

Zuvor seien jedoch einige allgemeine Resultate über lokalnilpotente λ' -Gruppen angegeben.

(5.1) Satz: Eine λ' -Gruppe G ist genau dann lokalnilpotent, wenn jede endliche erreichbare Untergruppe M von G nilpotent ist.

Beweis: Trivialerweise ist die Bedingung notwendig. Ist umgekehrt jede endliche erreichbare Untergruppe von G nilpotent, so folgt, da jeder endliche Komplex K von G in einer solchen Untergruppe M liegt, wegen [7], Satz 3.1.36. die Behauptung. #

(5.2) Satz: Eine lokalnilpotente λ' -Gruppe G ist metazyklisch.

Beweis: Eine lokalnilpotente λ' -Gruppe G ist insbesondere lokalauflösbar. Wegen $\lambda'f < \mu'f$ folgt deshalb mit Satz (4.6) die Behauptung. $\frac{H}{if}$

Da nach [7], Satz 3.2.10. eine p -Gruppe G genau dann lokalnilpotent ist, wenn sie lokalendlich ist, folgt wegen $\lambda'f < \lambda f$ unmittelbar:

(5.3) Satz: Eine $(p\lambda'f)$ -Gruppe G ist lokalnilpotent.

Nach [2], p. 23 ist die Umkehrung dieses Satzes nicht allgemein richtig. Sie kann jedoch bewiesen werden für abzählbar unendliche p -Gruppen:

(5.4) Satz: Eine abzählbar unendliche p -Gruppe G ist genau dann lokalnilpotent, wenn sie eine $\lambda'f$ -Gruppe ist.

Beweis: Die lokalnilpotente p -Gruppe G ist lokalendlich. Aus einer Abzählung $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von G erhält man deshalb eine Kette $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von endlichen nilpotenten p -Untergruppen $U_i = \{g_1, g_2, \dots, g_i\}$ mit der Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = G$. Zu einem endlichen Komplex K von G gibt es dann ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \{K\} \subset U_{i_0}.$$

Nach [7], Satz 3.2.27. ist aber

$$\{K\} \subset \langle U_{i_0} \rangle \subset \langle U_{i_0+1} \rangle,$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Als Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes von BURNSIDE erhalten wir:

(5.5) Satz: (Zerlegungssatz von BURNSIDE):

Eine $\lambda'f$ -Gruppe G ist genau dann direktes Produkt

$$G = \prod_p S_p$$

ihrer eindeutig bestimmten, lokalnilpotenten p -Sylowgruppen, wenn sie lokalnilpotent ist.

Beweis: 1) Sei die λ' -Gruppe G direktes Produkt ihrer eindeutig bestimmten, lokalnilpotenten p -Sylowgruppen S_p . Der endliche Komplex K von G liegt in einer endlichen erreichbaren Untergruppe M von G .

Das System (S_p) bestimmt eine Sylowbasis von G , also ist das System $(S_p \cap M)$ nach Satz (4.2) eine Sylowbasis von M . Da mit $S_p \subset G$ auch $S_p \cap M \subset M$ gilt, folgt die Beziehung

$$M = \bigtimes_p (M \cap S_p).$$

Damit ist M nach dem Zerlegungssatz für endliche Gruppen nilpotent, also ist auch die von K erzeugte Untergruppe $\langle K \rangle \subset M$ nilpotent.

2) Es sei umgekehrt G eine lokalnilpotente λ' -Gruppe. Nach Satz (5.2) und wegen [7], Satz 3.1.25. gibt es eine Normalfolge $(H_v)_{0 \leq v \leq \sigma}$:

$$E = H_0; H_\sigma = G; H_v \subset H_{v+1} \text{ für jeden Index } v < \sigma;$$

$$H_\tau = \bigcup_{v < \tau} H_v \text{ für jeden Limesindex } \tau \leq \sigma;$$

mit zyklischen Faktoren H_{v+1}/H_v .

Wir beweisen die Aussage des Satzes durch transfinite Induktion nach v .

Für $E = H_0$ ist die Behauptung richtig.

Wir können also annehmen, dass gilt:

Für alle $v < \lambda$ ist

$$H_v = \bigtimes_p S_{pv}$$

direktes Produkt seiner eindeutig bestimmten p -Sylowgruppen S_{pv} .

Für Ordinalzahlen $\mu \leq v < \lambda$ und jede Primzahl p gilt dann die Inklusion

$$S_{p\mu} \subset S_{pv}.$$

Fall 1: λ ist Limesindex.

Für jede Primzahl p setzen wir

$$S_{p\lambda} = \bigcup_{v < \lambda} S_{pv}.$$

Dann ist $S_{p\lambda}$ normal in H_λ ; denn ist $s \in S_{p\lambda}$, $h \in H_\lambda$, so gibt es ein $v < \lambda$ mit $s \in S_{pv}$, $h \in H_v$. Also ist $s^h \in S_{pv} \subset S_{p\lambda}$.

Weiter ist die p -Gruppe $S_{p\lambda}$ p -Sylowgruppe von H_λ , denn andernfalls gibt es eine $S_{p\lambda}$ echt umfassende p -Untergruppe S'_p von H_λ . Ist $s' \in S'_p$ mit $s' \notin S_{p\lambda}$, so gibt es ein $v < \lambda$ mit $s' \in H_v$. Damit folgt aber: die p -Untergruppe $\{S_{pv}, s'\}$ von H_v umfasst echt die p -Sylowgruppe S_{pv} von H_v , was ein Widerspruch ist.

Insgesamt folgt damit: $S_{p\lambda}$ ist normale, also eindeutig bestimmte p -Sylowgruppe von H_λ . Nach der Definition von $S_{p\lambda}$ folgt hieraus unmittelbar

$$H_\lambda = \bigtimes_p S_{p\lambda}.$$

Fall 2: λ ist nicht Limesindex.

Dann gibt es eine endliche erreichbare Untergruppe M von H_λ mit $H_\lambda = MH_{\lambda-1}$.

Da G lokalnilpotent ist, ist M nilpotent und deshalb nach dem Zerlegungssatz für endliche Gruppen direktes Produkt seiner eindeutig bestimmten p -Sylowgruppen T_p . Das System (T_p) ist einzige Sylowbasis von M , woraus mit Satz (5.2) nach dem Beweisgang von Satz (4.5) folgt, dass das System

$$(\{S_{p\lambda-1}, T_p\})$$

Sylowbasis von H_λ ist.

Ist V_p eine beliebige p -Sylowgruppe von H_λ , so gilt wegen Satz (3.9), der Normalität von $S_{p\lambda-1}$ in $H_{\lambda-1}$ und der Normalität von T_p in M :

$$S_{p\lambda-1} \subset V_p \text{ und } T_p \subset V_p.$$

Also ist für jede Primzahl p das Kompositum

$$S_{p\lambda} = \{S_{p\lambda-1}, T_p\}$$

einzigste, eindeutig bestimmte und deshalb normale p -Sylowgruppe von H_λ . Nach obigem folgt die Beziehung

$$H_\lambda = \bigtimes_p S_{p\lambda}.$$

Ist insbesondere $\lambda = \sigma$, so folgt für $H_\sigma = G$ die Behauptung.

Wegen $\varepsilon\lambda'f = \lambda'f < \lambda f$ folgt mit [7], Satz 3.2.10., dass für jede Primzahl p die p -Sylowgruppe $S_p = S_{p\sigma}$ lokalnilpotent ist.

†

§6: Der Satz von SCHUR

In diesem Paragraphen wollen wir den Satz von SCHUR (man vergleiche [5], p. 201) auf λ' -f-Gruppen übertragen. Für λ *f-Gruppen wurde dieser Satz von S. N. TSCHERNIKOW in [10] bewiesen. Unter entsprechenden Modifikationen können wir die Beweisidee von TSCHERNIKOW benutzen.

(6.1) Definition: Die Untergruppe U der Gruppe G heisst komplementär in G, wenn es eine Untergruppe V von G gibt, mit

$$U \cap V = E \text{ und } UV = G.$$

V heisst dann ein Komplement von U in G.

Wir erhalten sofort die triviale Aussage:

(6.2) Satz: Sind U und S Untergruppen der Gruppe G mit $U \subset S$, und ist V ein Komplement von U in G, so ist $V \cap S$ ein Komplement von U in S.

Beweis: Trivialerweise gilt $U \cap (S \cap V) = E$. Ist $s \in S$, so hat s nach Voraussetzung eine Darstellung $s = uv$ mit $u \in U$, $v \in V$. Da U in S liegt, folgt $u^{-1}s = v \in S$, also gilt

$$S \subset U(S \cap V) \subset S,$$

woraus $S = U(S \cap V)$ folgt.

Analog zu Satz (3.8) gewinnen wir für normale π -Sylowgruppen von λ' -f-Gruppen den Satz:

(6.3) Satz: Eine Untergruppe S der λ' -f-Gruppe G ist genau dann normale π -Sylowgruppe von G, wenn ihr Durchschnitt $M \cap S$ mit jeder endlichen erreichbaren Untergruppe M von G normale π -Sylowgruppe von M ist.

Beweis: Ist S normale π -Sylowgruppe von G , und ist M endliche erreichbare Untergruppe von G , so gilt $M \cap S \subset | M$. Da $M \cap S$ π -Untergruppe von M ist, gibt es eine π -Sylowgruppe T von M mit $M \cap S \subset T$. Da S als Normalteiler von G einzige π -Sylowgruppe von G ist, folgt $T \subset S$, also die Gleichheit

$$T = M \cap S.$$

Ist umgekehrt die Aussage des Satzes erfüllt, so gilt

$$S \subset | G.$$

Denn ist $s \in S$, $g \in G$, so gibt es eine endliche erreichbare Untergruppe M von G , die s und g enthält. Wegen $M \cap S \subset | M$ folgt, $s^g \in M \cap S \subset S$.

S ist π -Untergruppe von G , denn jedes Element $s \in S$ liegt in einem Durchschnitt $M \cap S$, wo M endliche erreichbare Untergruppe von G ist.

Ist S nicht π -Sylowgruppe von G , so gibt es eine π -Untergruppe T von G , die S echt umfasst. Ist $t \in (T-S)$, so gilt für eine t enthaltende endliche erreichbare Untergruppe M von G die echte Inklusion

$$M \cap S \subset M \cap T,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. †

(6.4) Definition: Eine π -Untergruppe U der Gruppe G

heisst a r i t h m e t i s c h a b g e s c h l o s s e n in G , wenn für jede Untergruppe V von G , in der U von endlichem Index liegt, dieser Index keine Primteiler $p \in \pi$ besitzt.

Insbesondere ist also eine π -Untergruppe U von G , für die es kein solches $V \neq U$ gibt, arithmetisch abgeschlossen in G .

Da die abstrakte Gruppeneigenschaft, eine π -Gruppe zu

sein, eine Syloweigenschaft ist, folgt unmittelbar, dass eine normale π -Sylowgruppe von G arithmetisch abgeschlossen ist in G .

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun beweisen:

(6.5) Satz (Satz von SCHUR):

- a) Eine normale π -Sylowgruppe S einer λ' -Gruppe G ist komplementär in G .
- b) Jedes Komplement T von S in G ist eine arithmetisch abgeschlossene π' -Sylowgruppe von G .

Beweis: a) Nach Satz (6.4) ist für jede endliche erreichbare Untergruppe M von G der Durchschnitt $M \cap S$ eine normale π -Sylowgruppe von M . Nach dem Satz von SCHUR über endliche Gruppen (man vergleiche [5], p. 201) ist $M \cap S$ komplementär in M .

Es sei $(M_i)_{i \in I}$, $I = (1, j, k, \dots)$, das System aller endlichen erreichbaren Untergruppen von G , und entsprechend sei $(S_i)_{i \in I}$ das System der Durchschnitte

$$S_i = M_i \cap S, \quad i \in I.$$

Ist T_i ein Komplement von S_i in M_i , so ist die Ordnung

$$o(T_i) := \text{ord}(T_i)$$

von T_i der grösste Teiler der Ordnung von M_i , der von keiner Primzahl aus π geteilt wird.

Für jedes $i \in I$ bezeichne K_i die endliche Menge aller Komplemente T_i von S_i in M_i .

Wir behaupten nun:

(*): Gilt für $i, j \in I$ $M_i \subset M_j$, so ist mit $T_j \in K_j$ der Durchschnitt $T_j \cap M_i \in K_i$.

Beweis von (*): Da M_i erreichbar ist in G , ist M_i erreichbar in M_j . Da M_j endlich ist, gibt es eine endliche Normalreihe

$$M_i = M_{i,0} \subset M_{i,1} \subset \dots \subset M_{i,k} = M_j.$$

Wir beweisen (*) durch Induktion nach k .

1) Für $k = 1$ ist M_i normal in M_j .

Für jedes Komplement $T_i \in K_i$ ist die Ordnung $o(T_i)$ der grösste Teiler der Ordnung von M_i , der keine Primteiler aus π besitzt. Da die Ordnung von M_i Teiler der Ordnung von M_j ist, folgt:

$o(T_i)$ ist der grösste Teiler von $o(M_i)$, der $o(T_j)$ teilt. Also ist die Ordnung

$$o' = o(T_j \cap M_i)$$

ein Teiler von $o(T_i)$.

Wir nehmen an, es ist $o' < o(T_i)$.

Es ist $o(T_j M_i) = o(M_i) o(T_j M_i / M_i)$,

und wegen der Isomorphie

$$T_j M_i / M_i \cong T_j / (T_j \cap M_i)$$

ist

$$o(T_j M_i / M_i) = o(T_j / T_j \cap M_i) = o(T_j) / o'.$$

Mit $o(M_i) = o(T_i) \text{ind}(M_i : T_i)$ folgt: die Ordnung $o(T_j M_i)$ und damit die Ordnung $o(M_j)$ wird von der ganzen Zahl

$$z = o(T_i) o(T_j) / o' > o(T_j)$$

geteilt. Da in z aber nur Primteiler aus π' eingehen, ist dies ein Widerspruch, und es folgt die Gleichheit

$$o' = o(T_i).$$

Wegen $S_i \cap (M_i \cap T_j) \subset S_j \cap T_j = E$ und $S_i \subset M_i$ erhalten wir damit die Beziehung

$$M_i = S_i(M_i \cap T_j) \text{ und } T_j \cap M_i \in K_i.$$

2) Wir nehmen an, (*) sei richtig für alle $k < r$.

3) Für $k = r$ ist $M_{i,r-1} \subset M_{i,r} = M_j$.

Nach Induktionsanfang ist also für $T_j \in K_j$ der Durchschnitt

$$T_j \cap M_{i,r-1} \in K_{i,r-1}.$$

Mit der Induktionsannahme 2) folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Für je zwei endliche erreichbare Untergruppen M_i und M_j von G gibt es, da G λ' -f-Gruppe ist, eine endliche erreichbare Untergruppe M_k von G mit $M_i \subset M_k$ und $M_j \subset M_k$. Setzt man für $i, j \in I$

$$K_i \leq K_j \text{ falls } M_i \subset M_j$$

gilt, so wird dadurch das System $(K_i)_{i \in I}$ induktiv geordnet. Wegen (*) können wir für je zwei Mengen K_i, K_j mit $K_i \leq K_j$ eine Projektion

$$r_{ji}: K_j \rightarrow K_i$$

definieren durch:

$$r_{ji}(T_j) = M_i \cap T_j \text{ für alle } T_j \in K_j.$$

Offensichtlich gilt dann für $K_i \leq K_j \leq K_k$ die Beziehung

$$r_{ii} = \text{Id}_{K_i} \text{ und } r_{ki} = r_{ji} r_{kj}.$$

Damit können wir den Satz von KUROSH (man vergleiche [5], p. 167/168) über die Existenz einer vollständigen Projektionsmenge P anwenden und erhalten das Ergebnis:

Aus jedem K_i kann ein T_i^* so gewählt werden, dass für alle i, j mit $K_i \leq K_j$ gilt

$$r_{ji}(T_j^*) = T_i^* = T_j^* \cap M_i.$$

Das aber bedeutet, dass $T_i^* \subset T_j^*$ gilt, wenn nur $M_i \subset M_j$ ist.

Wegen der induktiven Ordnung des Systems $(K_i)_{i \in I}$ ist das System $(T_i^*)_{i \in I}$ vermöge der Inklusion induktiv geordnet, so dass folgt: Die Vereinigung

$$T = \bigcup_{i \in I} T_i^*$$

ist eine Untergruppe von G .

Weil die endliche Ordnung eines Elementes $t \in T$ durch keine Primzahl aus π teilbar ist, und S π -Sylowgruppe von G ist, folgt

$$S \cap T = E.$$

Zu $g \in G$ gibt es ein $i \in I$ mit $g \in M_i$. Wegen $M_i = S_i T_i^*$ folgt

$$g \in S_i T_i^* \subset ST.$$

Also gilt $G = ST$, und wegen $S \cap T = E$ ist T ein Komplement von S in G .

b) Sei T ein Komplement von S in G , dann ist T eine π' -Untergruppe von G . Denn andernfalls enthält T für eine geeignete Primzahl $p \in \pi$ ein p -Element $t \neq 1$. Damit enthält T eine p -Untergruppe, also insbesondere eine π -Untergruppe $T' \neq E$. Dann aber ist ST' eine S echt umfassende π -Untergruppe von G , was im Widerspruch zur Voraussetzung über S steht.

Ist T echt enthalten in der π' -Untergruppe U von G , so gilt wegen Satz (6.2) die Gleichheit

$$U = T(S \cap U).$$

Ist $u \in (U - T)$, so folgt $u = ts$ mit geeignetem $t \in T$ und $1 \neq s \in S \cap U$. Da S π -Gruppe, U aber π' -Gruppe ist, ist dies ein Widerspruch. Damit haben wir: T ist π' -Sylowgruppe von G .

Wäre T nicht arithmetisch abgeschlossen in G , so gäbe es eine Untergruppe R von G , so dass T in R von endlichem

Index i liegt, und so dass i einen Primteiler aus π' besitzt. Wegen Satz (6.2) gilt

$$R = T(R \cap S) \text{ mit } T \cap (R \cap S) = E.$$

Also ist i gleich der Ordnung von $R \cap S$. Da $R \cap S$ aber eine π -Gruppe ist, ist dies ein Widerspruch.

Damit ist Satz (6.5) vollständig bewiesen.

$\frac{H}{H}$

Literaturverzeichnis:

- [1] R. BAER: Sylow theorems for infinite groups,
Duke Math. J. 6 (1940)
- [2] R. BAER: Erreichbare und engelsche Gruppenelemente,
Hamburger Abhandlungen 27 (1964)
- [3] M.I. KARGAPOLOW: Über konjugierte Sylow'sche
p-Untergruppen einer lokalnormalen Gruppe,
Uspechi mat. Nauk, 12 (1957) (Russ.)
- [4] L.G. KOVÁCS, B.H. NEUMANN, H. DE VRIES:
Some Sylow Subgroups,
Proc. Royal Soc. A 260 (1961)
- [5] A.G. KUROSH: The Theory of Groups, Vol. II,
Chelsea Publishing Company (1956)
- [6] W.R. SCOTT: Group Theory,
Prentice-Hall, New Jersey (1964)
- [7] W. SPECHT: Gruppentheorie,
Grundlehren der math Wiss., Springer (1956)
- [8] W. SPECHT: Lokale Gruppeneigenschaften,
Manuskript
- [9] W. SPECHT: Lokalendliche Gruppen,
Math. Nachrichten 18 (1958)
- [10] S.N. TSCHERNIKOW: Über die Ergänzzbarkeit Sylow'scher
 π -Untergruppen in gewissen Klassen unend-
licher Gruppen,
Mat. Sbornik 37 (1955) (Russ.)
- [11] S.N. TSCHERNIKOW: Endlichkeitsbedingungen in der
Gruppentheorie,
Math. Forschungsberichte, Deutscher Verlag
der Wissenschaften (1963)

Lebenslauf

Am 8. Juni 1942 wurde ich, Heinz Rudolf Strößner, als zweites Kind des Prokuristen Hans Strößner und seiner Ehefrau Luise, geb. Decker, in Illertissen (Bayern) geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule und der ersten fünf Schuljahre der Oberrealschule des "Kolleg der Schulbrüder" in Illertissen, kam ich 1957 auf das Realgymnasium Neu-Ulm und legte dort 1961 die Reifeprüfung nach dem Lehrplan der Oberrealschule ab.

Im Wintersemester 1961/62 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. Im Mai 1964 legte ich das Vordiplom und im Mai 1966 das Hauptdiplom für Mathematik ab.

Seit Juni 1966 bin ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg tätig.

Im August 1966 heiratete ich die Volksschullehrerin Inge Hohnecker.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 2 2990
